Zu einem Problem von H.J. Kowalsky

Weber, Hans

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 29, 1978,
S.127-134

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zu einem Problem von H.J. Kowalsky

Von **Hans Weber,** Konstanz
Vorgelegt von H.J. Kowalsky

0. Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine Frage von H.J. Kowalsky, deren Beantwortung nach seiner Ansicht von besonderer Wichtigkeit für das Strukturproblem des Verbandes sämtlicher Ringtopologien auf einem Körper ist: Ist eine lokalbeschränkte Ringtopologie auf einem Körper, welche zwischen zwei Ringtopologien liegt, die jeweils Supremum von endlich vielen V-Topologien sind, selbst eine solche, also Supremum von endlich vielen V-Topologien? (s. [2, S.185]). Diese Frage wird hier durch den folgenden Satz (positiv) beantwortet.

Satz: Ist $\mathbf{O}_0$ eine Ringtopologie auf einem Körper K, welche Supremum einer Familie $(\mathbf{O}_\iota)_{\iota\in I_0}$ von V-Topologien ist, und $\mathbf{O}$ eine Ringtopologie auf K, welche gröber ist als $\mathbf{O}_0$, dann ist für eine Teilmenge $I \subset I_0$ $\mathbf{O}$ das Supremum der Topologien $(\mathbf{O}_\iota)_{\iota\in I}$ (vgl. Satz (2.5)).

Für den Beweis dieses Satzes wird wesentlich benutzt, daß für je endlich viele verschiedene V-Topologien der Approximationssatz gilt. Daher wird in Abschnitt 1 zunächst der Begriff der unabhängigen Topologien eingeführt: Topologien $\mathbf{O}_1,\dots,\mathbf{O}_n$ auf einer Menge sind unabhängig genau dann, wenn für sie ein entsprechender Approximationssatz gilt. Der Begriff der unabhängigen Topologien gestattet einen allgemeineren und durchsichtigeren Ansatz zur Lösung der oben genannten Fragestellung (vgl. auch (1.9)); er ist auch im Zusammenhang mit anderen Fragestellungen interessant: Das in (1.8) genannte Prinzip zur Charakterisierung gewisser Ringtopologien ist nicht nur das Hauptlemma zur Beantwortung der oben genannten Fragestellung, sondern auch ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis von [4, Satz (2.3)] und damit von [4, Satz (3.3)]. In Abschnitt 2 ergibt sich beim Beweis des oben genannten Satzes noch als Nebenergebnis ein einfacher Beweis eines Approximationssatzes, der den Approximationssatz [3, Theorem 3.4 auf S. 292] für endlich viele V-Topologien enthält; dieser wird in [3] mit Hilfe von Methoden der Non-Standard-Analysis bewiesen.

1. Unabhängige Topologien

Es sei A eine nicht leere Menge.
Unter einer Topologie verstehen wir stets das zugehörige System der offenen Mengen.
Für zwei Topologien $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ auf A setzen wir

$$\mathbf{O}_1 \leq \mathbf{O}_2 :\Leftrightarrow \mathbf{O}_1 \subset \mathbf{O}_2,$$

und nennen dann $\mathbf{O}_1$ gröber als $\mathbf{O}_2$ und $\mathbf{O}_2$ feiner als $\mathbf{O}_1$; mit dieser Ordnungsrelation

$\leq$ ist die Menge aller Topologien auf A ein vollständiger Verband mit der trivialen Topologie als kleinstem Element und der diskreten Topologie als größtem Element.

Definition: $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ seien Topologien auf A. Dann heißen $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ *unabhängig,* wenn für $O_\nu \in \mathbf{O}_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ nur dann $\bigcap_{\nu=1}^{n} O_\nu = \emptyset$ ist, wenn mindestens eine der Mengen $O_1,\ldots,O_n$ leer ist.

Wir notieren einige einfach beweisbare Bemerkungen.

(1.1) *Für* $\nu = 1,\ldots,n$ *seien* $\mathbf{O}_\nu$ *und* $\mathbf{O}'_\nu$ *Topologien auf* A *mit* $\mathbf{O}'_\nu \subset \mathbf{O}_\nu$. *Dann gilt:*

(a) *Ist* $\mathbf{O}'_1$ *hausdorffsch und* $2 \leq |A|$ (: = *Elementanzahl von* A), *dann sind* $\mathbf{O}'_1$ *und* $\mathbf{O}_1$ *nicht unabhängig.*

(b) *Sind* $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ *unabhängig und* $m \in \mathbf{N}$, $m \leq n$, *dann sind* $\mathbf{O}'_1,\ldots,\mathbf{O}'_m$ *unabhängig.*

(c) *Ist* $\mathbf{O}_1$ *die triviale Topologie und* $n \geq 2$, *dann sind* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ *unabhängig.*

(1.2) $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n$ *seien paarweise disjunkte Mengen von Topologien auf* A. *Dann sind je endlich viele Topologien aus* $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathbf{T}_\nu$ *unabhängig genau dann, wenn für jedes* $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ *je endlich viele Topologien aus* $\mathbf{T}_\nu$ *unabhängig sind und* $\sup\mathbf{T}_1,\ldots,\sup\mathbf{T}_n$ *unabhängig sind. (Dabei sei* $\sup\emptyset$ *die triviale Topologie.)*

(1.3) $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ *seien unabhängige Topologien auf* A. *Dann gilt:*

(a) *Ist* $\mathbf{O}_1$ *hausdorffsch und nicht diskret, so ist* $\sup\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$ *nicht diskret.*

(b) *Ist* $n \geq 2$ *und* $|A| \geq 2$, *so ist* $\inf\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$ *nicht hausdorffsch.*

Beweis: (a) $\mathbf{O}_1$ sei hausdorffsch und nicht diskret. Dann gibt es ein $x_0 \in A$ mit $\{x_0\} \notin \mathbf{O}_1$. Wäre $\sup\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$ diskret, dann gäbe es $O_\nu \in \mathbf{O}_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ mit $\bigcap_{\nu=1}^{n} \mathbf{O}_\nu = \{x_0\}$ und, da $\{x_0\} \notin \mathbf{O}_1$ und $\mathbf{O}_1$ hausdorffsch ist, ein $O'_1 \in \mathbf{O}_1$ mit $\emptyset \neq O'_1 \subset O_1 \setminus \{x_0\}$. $O'_1, O_2,\ldots,O_n$ wären nicht leer, aber $O'_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n = \emptyset$, ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$.

(b) Ist $n \geq 2$ und $|A| \geq 2$, dann sind mit $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ nach (1.1) (b) auch $\inf\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$, $\mathbf{O}_2$ unabhängig; also ist nach (1.1) (a) $\inf\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$ nicht hausdorffsch.

(1.4) Voraussetzung: $\mathbf{O}_0, \mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ *seien Topologien auf* A.

B *bezeichne das topologische Produkt* $B := \prod_{\nu=1}^{n} (A, \mathbf{O}_\nu)$ *und*

d *die „Diagonaleinbettung"*

$$\begin{aligned} d\colon (A, \mathbf{O}_0) &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto (x,\ldots,x). \end{aligned}$$

Behauptung: (a) $d\colon (A, \mathbf{O}_0) \to d(A)$ *ist eine topologische Abbildung genau dann, wenn* $\mathbf{O}_0 = \sup\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$ *ist.*

(b) $\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n$ *sind unabhängig genau dann, wenn* d(A) *dicht in* B *liegt.*

Beweis: (a) Zum Beweis ist nur zu beachten, daß für ein gerichtetes System $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A und ein $x_0 \in A$ die beiden Aussagen „$\sup\{\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_n\}$-$\lim x_\iota = x_0$" und „$\lim d(x_\iota) = d(x_0)$" äquivalent sind zu „Für alle $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ ist $\mathbf{O}_\nu$-$\lim x_\iota = x_0$", also selbst äquivalent sind.

(b) Man prüft der Reihe nach, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind: $\mathbf{O}_1,\dots,\mathbf{O}_n$ sind unabhängig; für jedes $(O_1,\dots,O_n) \in \prod_{\nu=1}^{n} (\mathbf{O}_\nu \setminus \{\emptyset\})$ ist $(O_1 \times \dots \times O_n) \cap d(A) \neq \emptyset$; für jede nicht leere offene Teilmenge O von B ist $O \cap d(A) \neq \emptyset$; d(A) liegt nicht in B.

Folgerung (1.5)

Voraussetzung: *Für* $\nu = 0,1,\dots,n$ *seien* $\mathfrak{R}_\nu$ *eine separierte Uniformität auf* A, $\mathbf{O}_\nu$ *die Topologie von* $(A,\mathfrak{R}_\nu)$ *und* C_ν *eine vollständige Hülle von* $(A,\mathfrak{R}_\nu)$. $B := \prod_{\nu=1}^{n} (A,\mathfrak{R}_\nu)$ *bezeichne das Produkt der uniformen Räume* $(A,\mathfrak{R}_1),\dots,(A,\mathfrak{R}_n)$ *und* d *die „Diagonaleinbettung"* $d\colon (A,\mathfrak{R}_0) \longrightarrow B$, $x \longmapsto (x,\dots,x)$.

Behauptung (a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{R}_0 = \sup\{\mathfrak{R}_1,\dots,\mathfrak{R}_n\}$ (:= *gröbste Uniformität auf* A, *die feiner ist als* $\mathfrak{R}_1,\dots,\mathfrak{R}_n$).

(2) $d : (A,\mathfrak{R}_0) \to d(A)$ *ist ein Isomorphismus (uniformer Räume).*

(3) *Es gibt einen Isomorphismus* $\Delta : C_0 \to \overline{d(A)}$, *der* d *fortsetzt. (Dabei ist der Abschluß* $\overline{d(A)}$ *in* $\prod_{\nu=1}^{n} C_\nu$ *gebildet.)*

(4) d *läßt sich in eindeutiger Weise zu einem Isomorphismus* $\Delta : C_0 \to \overline{d(A)}$ *fortsetzen.*

(b) *Ist* $\mathfrak{R}_0 = \sup\{\mathfrak{R}_1,\dots,\mathfrak{R}_n\}$, *dann sind äquivalent:*

(1) $\mathbf{O}_1,\dots,\mathbf{O}_n$ *sind unabhängig.*

(2) *Es gibt einen Isomorphismus* $\Delta : C_0 \to \prod_{\nu=1}^{n} C_\nu$, *der* d *fortsetzt.*

(3) d *läßt sich in eindeutiger Weise zu einem Isomorphismus* $\Delta : C_0 \to \prod_{\nu=1}^{n} C_\nu$ fortsetzen.

Beweis: (a) Offenbar gilt: (4) $\curvearrowright$ (3) $\curvearrowright$ (2) $\curvearrowright$ (1). Nach [1,(3) auf S.37] gilt: (2) $\curvearrowright$ (4).
(b) Da nach (1.4) (b) (1) gleichbedeutend mit $\overline{d(A)} = \prod_{\nu=1}^{n} C_\nu$ ist, folgt (b) aus (a).

(1.6) Voraussetzung: A *sei eine (additive) Gruppe;* $\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2$ *seien Gruppentopologien auf* A und $\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$ *die zugehörigen Nullumgebungssysteme.*

Behauptung: (a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2$ *sind unabhängig.*

(2) $\forall (O_1,O_2) \in (\mathbf{O}_1 \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathbf{O}_2 \setminus \{\emptyset\})\ O_1 + O_2 = A$.

(3) $\forall (U_1,U_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\ U_1 + U_2 = A$.

(b) *Ist* A *ein Ring mit Einselement* 1 *und sind* $\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2$ *Ringtopologien, so sind ferner äquivalent:*

(1) $\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2$ *sind unabhängig.*

(4) $\forall (U_1,U_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\ U_1 \cap (1 + U_2) \neq \emptyset$.

(5) *Es gibt ein gerichtetes System* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *in* A *mit* $\mathbf{O}_1$-$\lim x_\iota = 0$ *und* $\mathbf{O}_2$-$\lim x_\iota = 1$.

Beweis: (3) $\curvearrowright$ (1): Seien $x_\nu \in O_\nu \in \mathbf{O}_\nu$ ($\nu = 1,2$). Wir zeigen, daß $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Da $U_1 := -x_1 + O_1 \in \mathbf{U}_1, U_2 := -O_2 + x_2 \in \mathbf{U}_2$, ist nach (3) $-x_1 + x_2 \in A = U_1 + U_2$,

also für ein $y_1 \in O_1$ und $y_2 \in O_2$ $-x_1+x_2 = (-x_1+y_1) + (-y_2+x_2)$ und damit $y_1 = y_2 \in O_1 \cap O_2$.
(1) $\curvearrowright$(2): Seien $O_1 \in \mathbf{O}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $O_2 \in \mathbf{O}_2 \setminus \{\emptyset\}$ und $x \in A$. Dann gibt es wegen der Unabhängigkeit von $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ ein $y \in O_1 \cap (x - O_2)$. Folglich ist für ein $z \in O_2$ $x - z = y$, also $x = y + z \in O_1 + O_2$.
Da $\mathbf{U}_\nu \cap \mathbf{O}_\nu$ eine Basis von $\mathbf{U}_\nu$ ist ($\nu = 1,2$), gilt „(2) $\curvearrowright$(3)" und in (b) „(1) $\curvearrowright$(4)".
In (b) gilt offenbar „(4) $\curvearrowright$(5)"; es bleibt zu zeigen:
(5) $\curvearrowright$ (1): Seien $x, y \in A$, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein gerichtetes System gemäß (5) und $d : A \to (A, \mathbf{O}_1) \times (A, \mathbf{O}_2)$ durch $d(x) := (x,x)$ definiert. Dann konvergiert $(d((y-x)x_\iota + x))_{\iota \in I}$ gegen (x,y). Also liegt $d(A)$ dicht in $(A, \mathbf{O}_1) \times (A, \mathbf{O}_2)$; damit sind nach (1.4) (b) $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ unabhängig.

Satz (1.7): A *sei ein Ring mit Einselement;* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}$ *seien hausdorffsche Ringtopologien auf* A, *so daß* $\mathbf{O}_1 \subset \mathbf{O} \subset \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2\}$ *und* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ *unabhängig sind. Dann gibt es eine Ringtopologie* $\mathbf{O}_3$ *auf* A, *so daß* $\mathbf{O}_3 \subset \mathbf{O}_2$, $\mathbf{O} = \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ *und* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3$ *unabhängig sind.*

Beweis: C, C_1, C_2 seien vollständige Hüllen von $(A, \mathbf{O})$, $(A, \mathbf{O}_1)$, $(A, \mathbf{O}_2)$. Nach (1.5) (b) und [1, (4) auf S. 35] gibt es stetige Ringhomomorphismen $f : C_1 \times C_2 \to C$ und $g : C \to C_1$ mit $f(a,a) = a = g(a)$ für alle $a \in A$. Es sei $D_1 := f(C_1 \times \{O\})$; wir zeigen:

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1 : C_1 &\longrightarrow D_1 \\ x &\longmapsto f(x,0) \end{aligned} \quad \text{ist ein topologischer Isomorphismus.}$$

Beweis: Offenbar sind f_1 und $g_1 := g_{/D_1}$ stetige Ringhomomorphismen und ist f_1 surjektiv. Daher genügt der Nachweis von $g_1 \circ f_1 = \mathrm{id}_{C_1}$. Sei dazu $x \in C_1$. Nach (1.5) (b) gibt es ein gerichtetes System $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A, so daß $((x_\iota, x_\iota))_{\iota \in I}$ in $C_1 \times C_2$ gegen $(x,0)$ konvergiert. Dann gilt $x = C_1\text{-}\lim x_\iota$ und wegen $x_\iota = (g \circ f)((x_\iota, x_\iota))$ und der Stetigkeit von $g \circ f$ $x = C_1\text{-}\lim (g \circ f)((x_\iota, x_\iota)) = (g \circ f)((x,0)) = (g_1 \circ f_1)(x)$.
Für $e_1 := f(1,0)$, $e_2 := f(0,1)$ gilt
(2) $e_1 + e_2 = 1$;
(3) $e_1 a = f_1(a)$, $e_2 a = f(0,a)$ für alle $a \in A$.

Beweis: $e_1 + e_2 = f((1,0) + (0,1)) = f(1,1) = 1$. Für $a \in A$ ist $e_2 a = f(0,1) \cdot f(a,a) = f((0,1) \cdot (a,a)) = f(0,a)$, ebenso $e_1 a = f(a,0) = f_1(a)$.
Wir bezeichnen die von $\begin{aligned} f_2 : A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto e_2 x \end{aligned}$ auf A induzierte Topologie mit
$\mathbf{O}_3 := \{f_2^{-1}(O) : O \text{ ist eine offene Teilmenge von } C\}$. Offenbar ist $\mathbf{O}_3$ eine Ringtopologie. Für ein gerichtetes System $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A und $x \in A$ gilt:
(4) $x_\iota \to x$ (bzgl. $\mathbf{O}_3$) $\curvearrowright$ $e_2 x_\iota \to e_2 x$ (in C);
(5) $x_\iota \to x$ (bzgl. $\mathbf{O}_1$) $\curvearrowright$ $e_1 x_\iota \to e_1 x$ (in C);
(6) $x_\iota \to x$ (bzgl. $\sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$) $\curvearrowright$ $x_\iota \to x$ (bzgl. $\mathbf{O}$);
(7) $x_\iota \to x$ (bzgl. $\mathbf{O}_2$) $\curvearrowright$ $x_\iota \to x$ (bzgl. $\mathbf{O}_3$).

Beweis: (4) gilt nach Definition von $\mathbf{O}_3$ und (5) nach (1) und (3).
(6): Nach (4) und (5) konvergiert (x_ι) gegen x bzgl. $\sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ genau dann, wenn

in C (e_1x_ι) gegen e_1x und (e_2x_ι) gegen e_2x konvergiert. Da nach (1) $e_1x_\iota + e_2x_\iota = x_\iota$ und $e_1x + e_2x = x$, konvergiert dann (x_ι) gegen x bzgl. $\mathbf{O}$. Umgekehrt folgt wegen der Stetigkeit der Multiplikation aus der Konvergenz von (x_ι) gegen x bzgl. $\mathbf{O}$, daß $\lim e_1x_\iota = e_1x$ und $\lim e_2x_\iota = e_2x$ (in C).

(7): Wenn $x = \mathbf{O}_2\text{-}\lim x_\iota$, dann ist $(0,x) = \lim\,(0,x_\iota)$ (in $C_1 \times C_2$), damit $f(0,x) = \lim f(0,x_\iota)$ (in C), also nach (3) $e_2x = \lim e_2x_\iota$ und nach (4) $x_\iota = \mathbf{O}_3\text{-}\lim x_\iota$.

Nach (7) ist $\mathbf{O}_3 \subset \mathbf{O}_2$, nach (6) $\mathbf{O} = \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$; mit (1.1) (b) erhält man schließlich, daß $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3$ unabhängig sind.

Hauptlemma (1.8)

Voraussetzung: (1) A *sei ein Ring mit Einselement;* $\mathbf{T}$ *und* $\mathbf{T}_0$ *seien Mengen von hausdorffschen Ringtopologien auf* A.

Es sei $\mathbf{O} \in \mathbf{T}$ *und* $\mathbf{O}_1 = \sup\{\mathbf{O}'' \in \mathbf{T}_0\colon \mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}\}$.

(2) $\forall\, \mathbf{O}' \in \mathbf{T}\ \exists\ \mathbf{O}'' \in \mathbf{T}_0\quad \mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}'$.

(3) *Es sei* $\mathbf{O} \subset \mathbf{O}_1$ *oder es gebe eine hausdorffsche Ringtopologie* $\mathbf{O}_2$ *auf* A, *so daß* $\mathbf{O} \subset \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2\}$ *und* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ *unabhängig sind.*

Behauptung: *Es ist* $\mathbf{O} = \mathbf{O}_1$ *oder es gibt eine nicht triviale Ringtopologie* $\mathbf{O}_3$ *auf* A, *die nicht zu* $\mathbf{T}$ *gehört, so daß* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3$ *unabhängig sind und* $\mathbf{O} = \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ *ist.*

Beweis: Es sei $\mathbf{O}_1 \neq \mathbf{O}$. Da offenbar $\mathbf{O}_1 \subset \mathbf{O}$, ist also $\mathbf{O} \not\subset \mathbf{O}_1$ und es läßt sich ein $\mathbf{O}_2$ gemäß (3) wählen. Nach (1.7) gibt es dann eine Ringtopologie $\mathbf{O}_3$ auf A, so daß $\mathbf{O}_3 \subset \mathbf{O}_2$, $\mathbf{O} = \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ und $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3$ unabhängig sind. Wegen $\mathbf{O} \neq \mathbf{O}_1$ ist $\mathbf{O}_3$ nicht trivial. Zu zeigen bleibt, daß $\mathbf{O}_3 \notin \mathbf{T}$. Wäre $\mathbf{O}_3 \in \mathbf{T}$, dann gäbe es nach (2) ein $\mathbf{O}'' \in \mathbf{T}_0$ mit $\mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}_3$; da dann auch $\mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}$, wäre nach Definition von $\mathbf{O}_1$ $\mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}_1$, insgesamt $\mathbf{O}'' \subset \inf\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ und damit $\mathbf{O}''$ nach (1.3) (b) nicht hausdorffsch, ein Widerspruch zu $\mathbf{O}'' \in \mathbf{T}_0$.

Folgerung (1.9)

Voraussetzung: A *sei ein Ring mit Einselement.* $\hat{\mathbf{T}}$ *sei eine Menge von hausdorffschen Ringtopologien auf* A; *je endlich viele Topologien aus* $\hat{\mathbf{T}}$ *seien unabhängig. Zu jeder nicht trivialen Ringtopologie* $\mathbf{O}'$ *auf* A, *die gröber ist als* $\sup \hat{\mathbf{T}}$, *gebe es ein* $\mathbf{O}'' \in \hat{\mathbf{T}}$ *mit* $\mathbf{O}'' \subset \mathbf{O}'$.

Behauptung: *Zu jeder Ringtopologie* $\mathbf{O}$ *auf* A, *die gröber ist als* $\sup\hat{\mathbf{T}}$, *gibt es ein* $\mathbf{T}_1 \subset \hat{\mathbf{T}}$ *mit* $\mathbf{O} = \sup \hat{\mathbf{T}}_1$.

Beweis: Sei $\mathbf{O}$ eine Ringtopologie, die gröber ist als $\sup \hat{\mathbf{T}}$. Ist $\mathbf{O}$ nicht hausdorffsch, dann ist $\mathbf{O} = \sup\emptyset$. Ist $\mathbf{O}$ hausdorffsch, dann sind mit $\mathbf{T} := \{\mathbf{O}' : \mathbf{O}'$ ist eine hausdorffsche Ringtopologie auf A mit $\mathbf{O}' \subset \sup \hat{\mathbf{T}}\}$, $\mathbf{T}_0 := \{\sup \mathbf{T}'' : \emptyset \neq \mathbf{T}'' \subset \hat{\mathbf{T}}\}$, $\mathbf{T}_1 := \{\hat{\mathbf{O}} \in \hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{O}} \subset \mathbf{O}\}$ und $\mathbf{O}_1 := \sup \mathbf{T}_1$ die Voraussetzungen von (1.8) erfüllt; (die Gültigkeit von (3) folgt aus (1.2).) Da jede nichttriviale Ringtopologie $\mathbf{O}_3$ auf A mit $\mathbf{O} := \sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3\}$ zu $\mathbf{T}$ gehört, ist also nach (1.8) $\mathbf{O} = \mathbf{O}_1 = \sup \mathbf{T}_1$.

Daß unter den Voraussetzungen von (1.9) durch $j : \mathbf{T}_1 \longrightarrow \sup \mathbf{T}_1$ ein Ordnungsisomorphismus*) von der Potenzmenge $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{T}})$ von $\hat{\mathbf{T}}$ auf die Menge der Ringtopologien auf A, welche gröber als sup $\hat{\mathbf{T}}$ sind, erklärt ist, erhält man mit folgender

Bemerkung (1.10):

Voraussetzung: *Es sei* $|A| \geq 2$, S *eine Menge,* $\mathbf{T}_0$ *eine Menge von Topologien auf* A *und* $j : \mathbf{P}(S) \longrightarrow \mathbf{T}_0$ *eine surjektive, monotone**) Abbildung; für jedes* $s \in S$ *seien* $j(\{s\}), j(S \setminus \{s\})$ *unabhängig und* $j(\{s\})$ *hausdorffsch.*

Behauptung: j *ist ein Ordnungsisomorphismus.*

Beweis: Nach Voraussetzung und (1.1) (a) ist für $s \in S$ $j(\{s\}) \not\subset j(S \setminus \{s\})$. Seien nun $S_1, S_2 \in \mathbf{P}(S)$ und $j(S_1) \subset j(S_2)$. Wäre $s \in S_1 \setminus S_2$, dann wäre $j(\{s\}) \subset j(S_1) \subset j(S_2) \subset j(S \setminus \{s\})$, ein Widerspruch. Also ist $S_1 \subset S_2$.

2. Suprema von V-Topologien

Eine Teilmenge M eines topologischen Ringes A heißt linksbeschränkt (rechtsbeschränkt), wenn es zu jeder Nullumgebung U in A eine Nullumgebung V in A gibt mit $M \cdot V \subset U$ $(V \cdot M \subset U)$, und beschränkt, wenn M sowohl links- als auch rechtsbeschränkt ist; A heißt lokallinksbeschränkt (lokalbeschränkt), wenn A eine linksbeschränkte (beschränkte) Nullumgebung besitzt.

Eine Ringtopologie $\mathbf{O}$ auf einem Schiefkörper K heißt V-Topologie, wenn für jede $\mathbf{O}$-Nullumgebung U $(K \setminus U)^{-1}$ $\mathbf{O}$-beschränkt ist. Jede V-Topologie ist eine gröbste und lokalbeschränkte Körpertopologie. (s. [2, S. 166])

In diesem Abschnitt sei K ein Schiefkörper und $\hat{\mathbf{T}}$ eine Menge von V-Topologien auf K.

Lemma (2.1)

Voraussetzung: (1) $\mathbf{O}, \mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_n$ *seien Ringtopologien auf* K.

(2) *Für jedes* $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ *und jede* $\mathbf{O}$*-Nullumgebung* U *sei* U *nicht* $\mathbf{O}_\nu$*-beschränkt.*

Behauptung: *Sind* M_ν $\mathbf{O}_\nu$*-beschränkte Teilmengen von* K $(\nu = 1, \ldots, n)$ *und* U *eine* $\mathbf{O}$*-Nullumgebung, dann ist* $U \not\subset \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu$.

Beweis: Wir führen den Beweis induktiv. Für $n = 1$ ist die Behauptung wegen (2) trivialerweise richtig. Seien nun M_ν $\mathbf{O}_\nu$-beschränkte Teilmengen von K, U eine $\mathbf{O}$-Nullumgebung; ferner V eine $\mathbf{O}$-Nullumgebung mit $V + V \subset U$ und $A_1 := M_1 - M_1$, $A_\nu := M_\nu$ $(\nu = 2, \ldots, n-1)$. Dann gibt es nach Induktionsannahme ein Element $y \in V \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n-1} A_\nu$ und ein Element $z \in V \setminus \bigcup_{\nu=2}^{n} B_\nu$, wobei $B_\nu := M_\nu \cup (M_\nu - y)$ $(\nu = 2, \ldots, n)$. Falls $z \notin M_1$, dann ist $z \in U \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu$. Falls $z \in M_1$, dann ist $x := y + z \in U \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu$: Es ist nämlich $x = y + z \in V + V \subset U$; wäre $x \in M_1$, dann wäre $y = x - z \in M_1 - M_1 = A_1$, ein Widerspruch; wäre für ein $\nu \in \{2, \ldots, n\}$ $x \in M_\nu$, dann wäre $z = x - y \in M_\nu - y \subset B_\nu$, ein Widerspruch.

---

*) d.h. $\forall\, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbf{P}(\hat{\mathbf{T}})$ $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \curvearrowright \sup \mathbf{T}_1 \subset \sup \mathbf{T}_2$.

**) d.h. $\forall\, S_1, S_2 \in \mathbf{P}(S)$ $S_1 \subset S_2 \curvearrowright j(S_1) \subset j(S_2)$.

Offenbar gilt:

(2.2) *Sind* $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_n$ *lokalbeschränkte Ringtopologien und* $\mathbf{O}$ *eine beliebige Ringtopologie auf* K, *dann gilt die Voraussetzung* (2) *von* (2.1) *genau dann, wenn* $\mathbf{O}$ *nicht feiner ist als* $\mathbf{O}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$.

Folgerung (2.3): *Sind* $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_n$ *verschiedene V-Topologien und* $\mathbf{O}_{n+1}$ *eine Körpertopologie auf* K, *welche nicht feiner ist als* $\mathbf{O}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, *dann sind* $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_{n+1}$ *unabhängig.* (vgl. [3, Theorem 3.4 auf S. 292]).

Beweis: Wir zeigen induktiv für $r = 1, \ldots, n+1$ die Unabhängigkeit von $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_r$. Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Seien nun U_ϱ $\mathbf{O}_\varrho$-Nullumgebungen ($\varrho = 1, \ldots, r+1$; $r \leq n$), ferner U eine $\mathbf{O}_{r+1}$-Nullumgebung mit $-1 \notin U$ und $(1+U)^{-1} \subset 1 + U_{r+1}$. Dann sind $M_\varrho := (K \setminus U_\varrho)^{-1} - 1$ $\mathbf{O}_\varrho$ – beschränkt ($\varrho = 1, \ldots, r$). Also gibt es nach (2.1) und (2.2) ein $x \in U \setminus \bigcup_{\varrho=1}^{r} M_\varrho$. Dann ist $1 + x \neq 0$ und $(1+x)^{-1} \in \bigcap_{\varrho=1}^{r} U_\varrho \cap (1 + U_{r+1})$. Daher sind $\sup\{\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_r\}$, $\mathbf{O}_{r+1}$ nach (1.6) unabhängig und, da nach Induktionsannahme $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_r$ unabhängig sind, nach (1.2) auch $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_{r+1}$ unabhängig.

Eine (2.3) entsprechende Aussage braucht nicht richtig zu sein, wenn man von $\mathbf{O}_{n+1}$ nur voraussetzt, daß $\mathbf{O}_{n+1}$ eine Ringtopologie ist: Ist nämlich $K = \mathbf{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen, $\mathbf{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen, $n = 1$, $\mathbf{O}_1$ die archimedische Topologie auf $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{O}_2$ die Ringtopologie auf $\mathbf{Q}$, welche $(a \cdot \mathbf{Z})_{a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}}$ als Nullumgebungsbasis besitzt, dann ist $\sup\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2\}$ die diskrete Topologie; also sind $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ nach (1.3) nicht unabhängig.

Folgerung (2.4): *Ist* $\mathbf{O}$ *eine nicht triviale Ringtopologie auf* K, *die gröber ist als* $\sup \hat{\mathbf{T}}$, *dann gibt es ein* $\hat{\mathbf{O}} \in \hat{\mathbf{T}}$ *mit* $\hat{\mathbf{O}} \subset \mathbf{O}$.

Beweis: Da $\mathbf{O}$ hausdorffsch ist, gibt es eine $\mathbf{O}$-Nullumgebung U mit $U \cdot U \subset K \setminus \{1\}$. Da dann U auch eine $\sup \hat{\mathbf{T}}$-Nullumgebung ist, gibt es endlich viele $\mathbf{O}_1, \ldots, \mathbf{O}_n \in \hat{\mathbf{T}}$ und $\mathbf{O}_\nu$-Nullumgebungen U_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) mit $\bigcap_{\nu=1}^{n} U_\nu \subset U$. Wäre $\mathbf{O}_\nu \not\subset \mathbf{O}$ für $\nu = 1, \ldots, n$, dann gäbe es, da $M_\nu := (K \setminus U_\nu)^{-1} \cup \{0\}$ $\mathbf{O}_\nu$-beschränkt für $\nu = 1, \ldots, n$, nach (2.1) und (2.2) ein $x \in U \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu$; also wäre $x^{-1} \in \bigcap_{\nu=1}^{n} U_\nu \subset U$ und damit $1 = x \cdot x^{-1} \in U \cdot U \subset K \setminus \{1\}$ ein Widerspruch.

Satz (2.5): (a) *Die Abbildung*

$$j : \mathbf{P}(\hat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \{\mathbf{O} : \mathbf{O} \text{ ist eine Ringtopologie auf } K,\ \mathbf{O} \subset \sup \hat{\mathbf{T}}\}$$
$$\mathbf{T} \longrightarrow j(\mathbf{T}) := \sup \mathbf{T}$$

ist ein Ordnungsisomorphismus.

(b) *Für* $\mathbf{T} \subset \hat{\mathbf{T}}$ *ist* $j(\mathbf{T})$ *lokalbeschränkt genau dann, wenn* $\mathbf{T}$ *endlich ist.*

Beweis: Zum Beweis von (a) hat man nur (1.9) und (1.10) anzuwenden; daß die dazu erforderlichen Voraussetzungen erfüllt sind, zeigen (2.3), (2.4), (1.2). (b) folgt unmittelbar aus (a) und [2, S. 177].

Folgerung (2.6): *Für eine hausdorffsche Ringtopologie* $\mathbf{O} \subset \sup \hat{\mathbf{T}}$ *auf* K gilt:

(a) $\mathbf{O}$ *ist eine Körpertopologie.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die vollständige Hülle von* $(\mathrm{K}, \mathbf{O})$ *ist nullteilerfrei.*
(2) *Die vollständige Hülle von* $(\mathrm{K}, \mathbf{O})$ *ist ein Schiefkörper.*
(3) $\mathbf{O} \in \hat{\mathbf{T}}$.

Beweis: Da das Supremum von Körpertopologien auf K eine Körpertopologie ist, folgt (a) aus (2.5) (a). Zum Beweis von (b) ist nur zu beachten, daß wegen (2.5), (2.3) und (1.4) für eine Familie $(\mathbf{O}_\iota)_{\iota \in I}$ von Topologien aus $\hat{\mathbf{T}}$ $\mathbf{O} = \sup_{\iota \in I} \mathbf{O}_\iota$ und die vollständige Hülle von $(\mathrm{K}, \mathbf{O})$ isomorph ist zu $\prod_{\iota \in I} \mathrm{K}_\iota$, wobei K_ι die vollständige Hülle von $(\mathrm{K}, \mathbf{O}_\iota)$ bezeichne.
Aus (2.5) und (1.7) erhält man die

Folgerung (2.7): *Es seien* $\mathbf{O}, \mathbf{O}_1$ *Ringtopologien auf* K, $\mathbf{T}_2 \subset \hat{\mathbf{T}}$, $\mathbf{O}_1 \subset \mathbf{O} \subset \sup\{\mathbf{O}_1, \sup \mathbf{T}_2\}$ *und* $\mathbf{O}_1$, $\sup \mathbf{T}_2$ *unabhängig. Dann gibt es eine Teilmenge* $\mathbf{T}_3 \subset \mathbf{T}_2$, *so daß* $\mathbf{O} = \sup\{\mathbf{O}_1, \sup \mathbf{T}_3\}$.

Dabei sind nach (2.3) und (1.2) $\mathbf{O}_1$, $\sup \mathbf{T}_2$ jedenfalls dann unabhängig, wenn $\mathbf{O}_1$ eine Körpertopologie ist, die mit keiner Topologie aus $\mathbf{T}_2$ vergleichbar ist.

Alle Resultate dieses Abschnitts bleiben gültig, wenn man z.B. stets „beschränkt" durch „linksbeschränkt" ersetzt, und entsprechend statt V-Topologien $\mathbf{O}$ Ringtopologien $\mathbf{O}$ betrachtet, für die für jede $\mathbf{O}$-Nullumgebung U $(\mathrm{K} \setminus \mathrm{U})^{-1}$ $\mathbf{O}$-linksbeschränkt ist, und in (2.6) (2) das Wort „Schiefkörper" durch „einfacher Ring" ersetzt.

3. Literaturverzeichnis

[1] G. Köthe, Topologische lineare Räume I. Berlin 1966.
[2] H.J. Kowalsky, Beiträge zur topologischen Algebra. Math. Nachr. 11, 143–185 (1954).
[3] A.L. Stone, Nonstandard Analysis in Topological Algebra in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability ed. W.A.J. Luxemburg. New York 1969.
[4] H. Weber, Charakterisierung der lokalbeschränkten Ringtopologien auf globalen Körpern. Math. Ann. (erscheint demnächst).